
Intervalle ouvert centré

Considérons un intervalle ouvert quelconque.

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$



Recherchons le milieu (ou centre) c de cet intervalle. Il est obtenu par $c = \frac{a+b}{2}$.

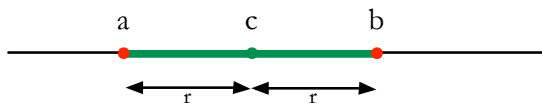
Le rayon r de l'intervalle est alors la distance entre le centre et les "bords" (on parle de bornes) a et b de l'intervalle. r est donc un réel strictement positif.

$$r = c - a$$

$$r = b - c = b - \left(\frac{a+b}{2}\right) = b - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b-a}{2}$$

Plus simplement, c'est donc aussi la largeur (le diamètre) de l'intervalle divisé par 2.

$$r = \frac{b-a}{2} > 0$$



Exprimer l'appartenance d'un réel x à l'intervalle équivaut donc à dire que la distance entre x et le centre de l'intervalle doit être inférieure au rayon.

$$x \in]a, b[\iff d(x, c) < r \iff |x - c| < r$$

On peut aussi obtenir cette relation de la manière suivante:

$$x \in]a, b[$$

$$\iff$$

$$a < x < b$$

$$\iff$$

$$0 < x - a \text{ et } x - b < 0$$

$$\iff$$

$$0 < x - (c - r) \text{ et } x - (c + r) < 0$$

$$\iff$$

$$-r < x - c \text{ et } x - c < r$$

$$\iff$$

$$-r < x - c < r$$

$$\iff$$

$$|x - c| < r$$

exemple 1: on considère l'intervalle ouvert $I_1 =]-2, 5[$

recherchons le centre et le rayon:

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2}$$

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{5-(-2)}{2} = \frac{7}{2}$$

l'intervalle $I_1 = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 5\}$ peut donc être défini de manière équivalente par

$$I_1 = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|x - \frac{3}{2}\right| < \frac{7}{2}\right\}$$



exemple 2: soit l'intervalle défini par $I_2 = \{x \in \mathbb{R} : |x + 3| < 1\}$

2 | *Intervalle centrés, nb* la condition d'appartenance à l'intervalle étant $|x - (-3)| < 1$, nous voyons que le rayon est égal à 1 et le centre est -3 .

$$c = -3$$

$$r = 1$$

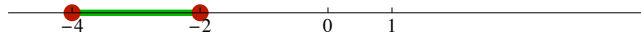
les bornes de l'intervalle sont alors:

$$\text{borne inférieure } a = c - r = -3 - 1 = -4$$

$$\text{borne supérieure } b = c + r = -3 + 1 = -2$$

et donc

$$I_2 =] -4, -2[$$



Intervalle fermés centrés

Considérons un intervalle fermé quelconque.

$$] a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

Recherchons le milieu (ou centre) c de cet intervalle. Il est obtenu par $c = \frac{a+b}{2}$.

Le rayon r de l'intervalle est alors la distance entre le centre et les "bords" (on parle de bornes) a et b de l'intervalle.

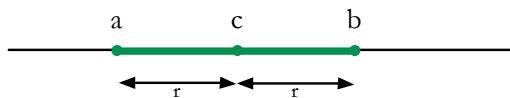
r est donc un réel strictement positif.

$$r = c - a$$

$$r = b - c = b - \left(\frac{a+b}{2}\right) = b - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b-a}{2}$$

Plus simplement, c'est donc aussi la largeur (le diamètre) de l'intervalle divisé par 2.

$$r = \frac{b-a}{2} > 0$$



Exprimer l'appartenance d'un réel x à l'intervalle équivaut donc à dire que la distance entre x et le centre de l'intervalle doit être inférieure au rayon.

$$x \in [a, b] \iff d(x, c) \leq r \iff |x - c| \leq r$$

On peut aussi obtenir cette relation de la manière suivante:

$$x \in [a, b]$$

$$\iff$$

$$a \leq x \leq b$$

$$\iff$$

$$0 \leq x - a \text{ et } x - b \leq 0$$

$$\iff$$

$$0 \leq x - (c - r) \text{ et } x - (c + r) \leq 0$$

$$\iff$$

$$-r \leq x - c \text{ et } x - c \leq r$$

$$\iff$$

$$-r \leq x - c \leq r$$

$$\iff$$

$$|x - c| \leq r$$

exemple 1: on considère l'intervalle fermé $I_1 = [-2, 5]$

recherchons le centre et le rayon:

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{5-(-2)}{2} = \frac{7}{2}$$

l'intervalle $I_1 = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 5\}$ peut donc être défini de manière équivalente par

$$I_1 = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|x - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{7}{2}\right\}$$



exemple 2: soit l'intervalle défini par $I_2 = \{x \in \mathbb{R} : |x + 3| \leq 1\}$

la condition d'appartenance à l'intervalle étant $|x - (-3)| \leq 1$, nous voyons que le rayon est égal à 1 et le centre est égal à -3 .

$$c = -3$$

$$r = 1$$

les bornes de l'intervalle sont alors:

$$\text{borne inférieure } a = c - r = -3 - 1 = -4$$

$$\text{borne supérieure } b = c + r = -3 + 1 = -2$$

et donc

$$I_2 = [-4, -2]$$

