

## Adhérence

Un réel  $a$  adhère à l'ensemble  $E \subset \mathbb{R}$  si et seulement si tout intervalle ouvert centré en  $a$  possède une intersection non vide avec  $E$ .

$$a \in \text{adh } E$$

$\iff$

$$\forall r > 0 : ]a-r, a+r[ \cap E \neq \emptyset$$

L'ensemble des réels qui adhèrent à  $E$  est noté  $\text{adh } E$  (adhérence de  $E$ ) ou encore  $\overline{E}$ .

$$\text{adh } E = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ adhère à } E\}$$

$$\text{adh } \emptyset = \emptyset$$

$$\text{adh } \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$\text{adh } [a, b] = \text{adh } ]a, b[ = \text{adh } ]a, b[ = \text{adh } ]a, b[ = [a, b]$$

le réel  $-2$  adhère à l'ensemble  $E = ]-2, 5[$

En effet,  $-2 \in E$

$-2$  appartient à l'ensemble  $] -2, 5[$

$$\forall r > 0 : -2 \in ] -2-r, -2+r [$$

$-2$  appartient à tout intervalle ouvert centré en lui-même

$$-2 \in ] -2-r, -2+r [ \cap E$$

donc  $-2$  appartient à l'intersection de l'intervalle ouvert et  $E$

$$] -2-r, -2+r [ \cap E \neq \emptyset$$

et dès lors l'intersection est non vide

le réel  $5$  adhère à l'ensemble  $E = ]-2, 5[$

montrons que  $\forall r > 0 : ]5-r, 5+r[ \cap ]-2, 5[ \neq \emptyset$

en effet,

pour  $0 < r \leq 7$ ,

$$]5-r, 5+r[ \cap ]-2, 5[ = ]5-r, 5[ \neq \emptyset$$

pour  $r > 7$ ,

$$]5-r, 5+r[ \cap ]-2, 5[ = ]-2, 5[ \neq \emptyset$$

Pour montrer qu'un réel  $a$  n'adhère pas à  $E$ , il suffit de trouver un intervalle ouvert centré en  $a$  qui possède une intersection vide avec  $E$ .

$$a \notin \text{adh } E$$

$\iff$

$$\exists r > 0 : ]a-r, a+r[ \cap E = \emptyset$$

le réel  $-7$  n'adhère pas à l'ensemble  $E = ]-2, 5[$

En effet, prenons  $r = 3$ :

$$]-7-3, -7+3[ = ]-10, -4[$$

l'intervalle ouvert choisi est  $]-10, -4[$

et

$$]-10, -4[ \cap ]-2, 5[ = \emptyset$$