Adhérence

Un réel a adhère à l'ensemble $E \subset \mathbb{R}$ si et seulement si tout intervalle ouvert centré en a possède une intersection non vide avec E.

$a \in \text{ adh } E$
$\Longleftrightarrow$
$\forall\, r > 0 : \,]a-r, a+r[\, \bigcap E \neq \emptyset$

L'ensemble des réels qui adhèrent à E est noté adh E (adhérence de E) ou encore $\overline{E}$.
adh E = $\{x \in \mathbb{R} : x \text{ adhère à } E\}$

adh $\emptyset = \emptyset$
adh $\mathbb{R} = \mathbb{R}$
adh $[a, b] =$ adh$]\,a, b[=$ adh$[a, b[=$ adh$]\,a, b[= [a, b]$

---

le réel -2 adhère à l'ensemble E=$[-2, 5[$

En effet, $-2 \in$ E
-2 appartient à l'ensemble $[-2, 5[$
$\forall\, r > 0 : \; -2 \in]-2-r, -2+r[$
-2 appartient à tout intervalle ouvert centré en lui-même
$-2 \in \;]-2-r, -2+r[\, \bigcap E$
donc -2 appartient à l'intersection de l'intervalle ouvert et E
$]-2-r, -2+r[\, \bigcap E \neq \emptyset$
et dès lors l'intersection est non vide

---

le réel 5 adhère à l'ensemble E=$[-2, 5[$

montrons que $\forall\, r > 0 : \,]5-r, 5+r[\, \bigcap [-2, 5[\; \neq \emptyset$

en effet,
pour $0 < r \leq 7$,
$]5-r,\ 5+r[\, \bigcap [-2,\ 5[\, =]5-r,\ 5[\, \neq \emptyset$
pour $r > 7$,
$]5-r,\ 5+r[\, \bigcap [-2,\ 5[\, =]-2,\ 5[\, \neq \emptyset$

Pour montrer qu'un réel a n'adhère pas à E, il suffit de trouver un intervalle ouvert centré en a qui possède une intersection vide avec E.

$a \notin \text{ adh } E$
$\Longleftrightarrow$
$\exists\, r > 0 :]a-r, a+r[\, \bigcap E = \emptyset$

---

le réel -7 n'adhère pas à l'ensemble E=$[-2, 5[$

En effet, prenons $r = 3$:
$]-7-3, -7+3[\, = \;]-10, -4[$
l'intervalle ouvert choisi est $]-10, -4[$
et
$]-10, -4[\, \bigcap [-2, 5[\, = \emptyset$
