Equations logarithmiques et exponentielles

- $\log_a x$ et a^x sont des fonctions injectives:

$$x = y \iff a^x = a^y \tag{1}$$

$$x = y \iff \log_a x = \log_a y \qquad \text{avec } x, y > 0 \tag{2}$$

- La résolution d'une équation simple revient donc à réécrire celle-ci sous la forme $a^x = a^y$ ou $\log_a x = \log_a y$.
  Pour ce faire, il est souvent utile d'utiliser les propriétés des fonctions logarithmiques

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3^{1-x} - \frac{1}{9} = 0$

  On réécrit l'équation sous la forme $a^x = a^y$, la base étant ici égale à 3

$$3^{1-x} = 3^{-2}$$

  en utilisant (1), on a alors

$$1 - x = -2$$

  et donc

$$x = 3$$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\log_2 x + 1 = 0$

  On réécrit l'équation sous la forme $\log_a x = \log_a y$, la base étant ici égale à 2

$$\log_2 x = -1$$

  sachant que $\log_a a^x = x$,

$$\log_2 x = \log_2 2^{-1}$$

  en utilisant (1), on a alors

$$x = \frac{1}{2}$$

Macformath.net
doing maths on your Mac

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\log_3 x - 2\log_3(x-2) = 1$

Réécrivons l'équation sous la forme suivante

$$\log_3 x = \log_3(x-2) + 1$$

Transformons chaque terme en un logarithme, sachant que $\log_3 3 = 1$

$$\log_3 x = \log_3(x-2) + \log_3 3$$

Ramenons-nous à la forme $\log_a x = \log_a y$ en utilisant la propriété $\log_a x + \log_a y = \log_a(x.y)$

$$\log_3 x = \log_3(3\,(x-2))$$

en utilisant (1), on a alors

$$x = 3\,(x-2)$$

et

$$x = 3$$

- Dans le cas d'une équation plus compliquée, on peut parfois se ramener à une équation algébrique en posant $y = a^x$
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2^{2x+2} = 17\,2^x - 4$

On réécrit l'équation sous la forme d'une équation du second degré

$$4\,.\,2^{2x} - 17\,.\,2^x + 4 = 0$$

on pose alors $y = 2^x$et l'équation devient

$$4\,y^2 - 17\,y + 4 = 0$$

cette équation a deux solutions:

$$y = 4 \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{4}$$

c'est-à-dire

$$2^x = 4 \quad \text{ou} \quad 2^x = \frac{1}{4}$$

$$2^x = 2^2 \quad \text{ou} \quad 2^x = 2^{-2}$$

et

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -2$$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln^2 x - \ln x = 6$

  On réécrit l'équation sous la forme d'une équation du second degré

  $$\ln^2 x - \ln x - 6 = 0$$

  on pose alors $y = \ln x$ et l'équation devient

  $$y^2 - y - 6 = 0$$

  cette équation a deux solutions:

  $$y = -2 \text{ ou } y = 3$$

  c'est-à-dire

  $$\ln x = -2 \text{ ou } \ln x = 3$$

  sachant que $\ln x = y \iff x = e^y$, on a

  $$x = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \text{ ou } x = e^3$$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x - \frac{4}{e^x} + 3 = 0$

  On réécrit l'équation sous la forme d'une équation du second degré

  $$e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$$

  on pose alors $y = e^x$ et l'équation devient

  $$y^2 + 3y - 4 = 0$$

  cette équation a deux solutions:

  $$y = 1 \text{ ou } y = -4$$

  c'est-à-dire

  $$e^x = 1 \text{ ou } e^x = -4$$

  la 1ère égalité donne $x = 0$ et la seconde est clairement impossible, l'image e la fonction e^x étant $\mathbb{R}_0^+$, elle ne peut prendre des valeurs négative.

  nous avons donc une seule solution

  $$x = 0$$

Macformath.net doing maths on your Mac

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\log(x+1) - \log x = \log(x-2)$

L'argument d'une fonction logarithme devant être strictement positif, nous avons comme CE:

$$\begin{cases} x+1>0 & (1) \\ x>0 & (2) \\ x-2>0 & (3) \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} x>-1 & (1) \\ x>0 & (2) \\ x>2 & (3) \end{cases}$$

C'est-à-dire qu'il faut que $x > 2$.

On réécrit l'équation sous la forme suivante

$$\log(x+1) = \log x + \log(x-2)$$

Ramenons-nous à la forme $\log_a x = \log_a y$ en utilisant la propriété $\log_a x + \log_a y = \log_a(x.y)$

$$\log(x+1) = \log\left(x^2 - 2\,x\right)$$

en utilisant (1), on a alors

$$x + 1 = x^2 - 2\,x$$

$$x^2 - 3\,x - 1 = 0$$

cette équation a deux solutions:

$$x = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \simeq -0.302776 \quad \text{ou} \quad x = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \simeq 3.30278$$

Vu la C.E. $x > 2$, la seule solution de l'équation est

$$x = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \simeq 3.30278$$

Macformath.net doing maths on your Mac