

Logarithmes et exponentielles

Exercices récapitulatifs

■ Traduire sous forme de logarithme

a) $0.001 = 10^{-3}$

b) $2 = \sqrt[3]{8}$

c) $27 = 81^{3/4}$

d) $\frac{1}{4} = 32^{-2/5}$

e) $u = 10^t$

f) $x = e^y$

■ Traduire sous forme exponentielle

a) $\log_3 27 = 3$

b) $\log_{1/5} \sqrt{5} = \frac{-1}{2}$

c) $\log y = x$

d) $\ln x = y$

■ Calculer sans l'aide d'une calculatrice

a) $\log 0.001$

b) $\log_3 \sqrt{27}$

c) $\log_4 64$

d) $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$

e) $\log_2 6 - \log_2 3$

f) $\log_3(-27)$

g) $\log 5 + \log 2$

h) $\log_3 36 - \log_9 16$

i) $3 \log_6 2 - \log_6 3 + 2 \log_6 \frac{3}{2}$

■ Evaluer à l'aide d'une calculatrice à 4 chiffres significatifs

a) $\ln \pi$

b) $5 \cdot 10^{1.2}$

c) $7^{-\sqrt{3}}$

d) $\log(-3)$

e) $\frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2}$

f) $\log_2 15$

■ Trouver, sans aide de la calculatrice, le meilleur encadrement par deux nombres entiers des réels suivants.

- a) $\log_2 20$
- b) $\log_3 10$
- c) $\log 1254$
- d) $\ln 3$
- e) e^{-3}

■ Résoudre à l'aide de la définition du logarithme.

- a) $\log_2 x = -1$
- b) $\log_3 \frac{1}{x} = -2$
- c) $\log_x 8 = -3$
- d) $\log_x 3 = \frac{1}{4}$

■ Décomposer à l'aide des propriétés des logarithmes.

- a) $\log_a (x y^3)$
- b) $\log_a \left(\frac{r}{u^2} \right)$
- c) $\log \sqrt{a^3 b}$
- d) $\ln \frac{a^3 b^2}{c}$
- e) $\log_a \frac{x}{\sqrt{y^3 z}}$

■ Exprimer sous forme d'un seul logarithme.

- a) $\frac{1}{3} \log_a x - 2 \log_a y + \frac{1}{2} \log_a z$
- b) $3 \log x + 2 \log y - \frac{1}{4} \log z$
- c) $3 \left(\frac{1}{2} \ln u - 5 \ln t \right)$
- d) $2 \log_2 (x - 1) - \log_2 x$
- e) $3 \log_2 x + 4 \log_4 (x + 2)$

■ Décomposer à l'aide des propriétés des logarithmes.

- a) $\log_a \frac{\sqrt{x-3}}{x^2}$
- b) $\log((x-2)^2 (x+3)^3)$
- c) $\ln \frac{\sqrt{2x-1}}{(1+x)^2}$

■ Simplifier les expressions suivantes.

a) $\frac{5^{x-1}}{5^{3-x}}$

b) $\left(\frac{e^{-x}}{e^{2x}}\right)^{2x}$

c) $\frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

■ Sachant que $\ln 2 = 0.693147$ et $\ln 5 = 1.60944$, évaluer sans l'aide d'une calculatrice

a) $\ln 10$

b) $\ln 0.4$

c) $\ln \sqrt[3]{20}$

■ Résoudre dans \mathbb{R}

a) $4^{3x-x^2} - 16 = 0$

b) $3^{x-1} = 9^{1-2x}$

c) $e^{-x} - e^{x^2} = 0$

d) $(e^x)^2 - 16 = 0$

e) $3^x = 6^{x-1}$

f) $10^{2x} + 5 \cdot 10^x - 6 = 0$

g) $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$

h) $e^{-x+1} + e^x = 0$

i) $3^{1-x} + 3^x - 4 = 0$

j) $4x - x e^{-2x} = 0$

■ Résoudre

a) $\log_{1/3}(2x+1) = -1$

b) $\ln(x+3) - \ln(2x-1) = 0$

c) $\ln 3x^2 = 2 + \ln 9x$

d) $\log_2(x+3) - \log_2 x = 2$

e) $\log(\ln x) = 1$

f) $\log_x 16 = \log_2 x$

g) $\log(x-2) + 1 = \log(2x+1)$

h) $\ln(x^2-3) = 2 \ln(x-1)$

i) $\log(2x+1) - \log(x-1) = \log x$

j) $3 \ln^2 x - 2 \ln x = 1$

4 | *exrecaplog.nb*
k) $\ln^2 x = \ln x^2$

l) $\ln^3 x + \ln x - 2 = 0$

■ Résoudre les inéquations suivantes dans \mathbb{R}

a) $\frac{1}{4} - 4^{x+1} \geq 0$

b) $e^{2x} - 9 \leq 0$

c) $\frac{e^x+1}{e^x-1} < 0$

d) $e^{4x} - 3e^{2x} + 2 < 0$

e) $\frac{1}{e^x+1} - 2 > 0$

f) $\frac{e^x-e^{-x}}{2} \leq 0$

g) $\frac{e^x+e^{-x}}{2} > 0$

h) $2^x + \frac{1}{1-2^x} > 0$

■ Résoudre les inéquations suivantes dans \mathbb{R}

a) $\log_2(x+1) - 2 \leq \log_2(3x)$

b) $\log_4(x-1) \geq \log_2 3$

c) $\log_{1/3}(x^2+2) \geq \log_{1/3} x - 1$

d) $\log^2 x + \log x - 2 < 0$

e) $\frac{\ln x}{1+\ln x} \geq 0$

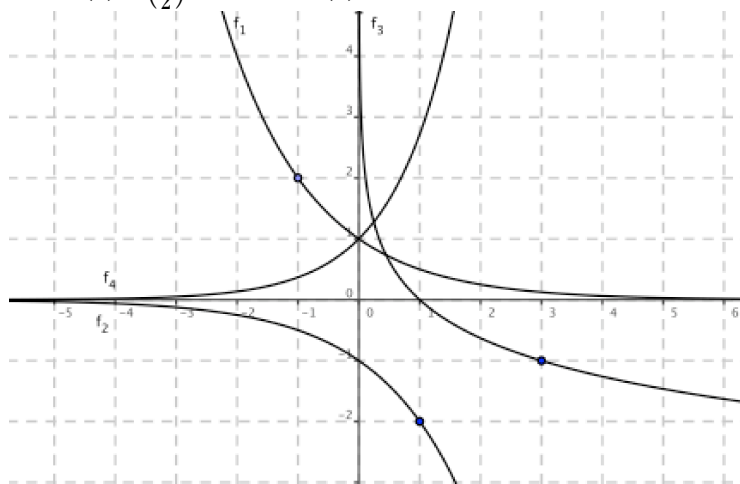
f) $\log_7(2x-1) > -2$

g) $\ln(2x-3) - \ln(x-4) < 2 \ln 5$

h) $\ln(x+1) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) < 0$

■ Identifier les fonctions suivantes

$$f(x) = e^x \quad g(x) = \log_{1/3} x \quad b(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad i(x) = -2^x$$



■ Tracer le graphe des fonctions suivantes. Préciser leur domaine, leur image, leurs éventuelles racines et asymptotes.

a) $y = 2^{x+1}$ b) $f(x) = \log_3(1-x)$ c) $f(x) = 3^{2+x} - 1$ d) $f(x) = 2 + \ln(2x-1)$

■ Pour les fonctions suivantes, calculer $f(-2)$

a) $f(x) = 2^{x+1}$ b) $f(x) = \log_3(1-x)$ c) $f(x) = 3^{2+x} - 1$ d) $f(x) = 2 + \ln(2x-1)$

■ Déterminer la réciproque des fonctions suivantes et préciser si la réciproque est une fonction.

a) $f(x) = 2^{x+1}$ b) $f(x) = \log_3(1-x)$ c) $f(x) = 3^{2+x} - 1$ d) $f(x) = 2 + \ln(2x-1)$

e) $f(x) = 2 \ln(x+1)$ f) $f(x) = 3^{2x} - 4$ g) $f(x) = 3 - \ln(2x-5)$ h) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

■ Prenons une feuille de papier de 0,1 mm d'épaisseur. Plions-la en 2, puis encore en 2, puis encore en 2. Quel est le nombre de pliages nécessaire pour obtenir une épaisseur de 1 mètre? Utilisez la calculatrice!

■ On lance deux dés. Combien de lancers de ces dés faut-il exécuter pour que la probabilité d'obtenir un "double six" soit

- a) minimum de 0,5?
b) plus grande que 0,9?

■ Une usine produit 300 000 unités la première année. La croissance annuelle est de 5%. Après combien d'années la production atteindra-t-elle les 500 000 unités ?

Remarque à propos des pourcentages:

a) augmenter de $i\%$ un nombre revient à multiplier celui-ci par $(1 + \frac{i}{100})$
exemple: augmenter 700 de 8% revient à calculer $700 \cdot 1,08 = 756$

b) diminuer de $i\%$ un nombre revient à multiplier celui-ci par $(1 - \frac{i}{100})$
exemple: diminuer 700 de 8% revient à calculer $700 \cdot 0,92 = 644$

■ Déterminer la parité

1) $\log_2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

2) $\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

■ Calcule et interprète graphiquement

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 4^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 0.2^{x-1}$$

■ Dérive les fonctions suivantes

1) $x e^x$

2) $e^{\sin(x)}$

3) $\sqrt{1 - e^{2x}}$

4) $e^{\arccos(x)}$

5) $e^{\lg(5^x)}$

6) $\cos(\ln(x))$

7) 3^{2x-5}

8) $\log_2(x^3)$

9) $\ln^2(3x)$

10) $2^{\text{ArcSin}x}$

■ Etudier les fonctions suivantes

1) $\frac{e^x}{x}$

2) $x^2 e^x$

3) e^{-x^2}

4) $e^{2x} - 2e^x$

5) $\frac{\ln(x)}{x}$

6) $\ln(|x^2 - 1|)$

7) $\frac{1}{\ln^2(x) - 4}$

8) $x - \ln(x - 1)$

9) $\sqrt{1 - e^x}$

10) $x \ln(x)$