

Inéquations logarithmiques et exponentielles

Si $a > 1$

$\log_a x$ et a^x sont des fonctions strictement croissantes:

$$x < y \iff a^x < a^y \quad (1)$$

$$x < y \iff \log_a x < \log_a y \quad (2)$$

Si $0 < a < 1$

$\log_a x$ et a^x sont des fonctions strictement décroissantes:

$$x < y \iff a^x > a^y \quad (3)$$

$$x < y \iff \log_a x > \log_a y \quad (4)$$

- La résolution d'une inéquation simple revient donc à réécrire celle-ci sous la forme $a^x < a^y$ ou $\log_a x < \log_a y$. Pour ce faire, il est souvent utile d'utiliser les propriétés des fonctions logarithmiques.

- Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $4^{2x-1} - \sqrt{8} > 0$

On réécrit l'équation sous la forme $a^x = a^y$, en utilisant comme base $a = 2$

$$2^{2(2x-1)} > 2^{\frac{3}{2}}$$

2^x étant strictement croissante, en utilisant (1) on a alors

$$2(2x-1) > \frac{3}{2}$$

et donc

$$4x - 2 > \frac{3}{2}$$

$$x > \frac{7}{8}$$

$$S =]\frac{7}{8}, \rightarrow$$

- Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $\log_3(x+2) + \log_9 x > 1$

L'argument d'une fonction logarithme devant être strictement positif, nous avons comme CE:

$$\begin{cases} x+2 > 0 & (1) \\ x > 0 & (2) \end{cases} \text{ ou encore simplement } x > 0$$

On transforme le 1er membre en un logarithme en base 3

$$\log_3(x+2) + \frac{\log_3 x}{\log_3 9} > 1$$

$$\log_3(x+2) + \frac{\log_3 x}{2} > 1$$

après mise au même dénominateur,

$$2 \log_3(x+2) + \log_3 x > 2$$

$$\log_3(x+2)^2 + \log_3 x > 2$$

$$\log_3(x(x+2)^2) > 2$$

On réécrit l'équation sous la forme $\log_a x > \log_a y$, la base étant ici égale à 3.

2 peut s'écrire $\log_3 9$

en utilisant (2), on a alors

$$\begin{aligned} x(x+2)^2 &> 9 \\ x(x^2 + 4x + 4) - 9 &> 0 \end{aligned}$$

$$x^3 + 4x^2 + 4x - 9 > 0$$

on voit facilement que $x = 1$ annule le 1er membre

après factorisation à l'aide de la méthode de Hörner, on obtient

$$(x-1)(x^2 + 5x + 9) > 0$$

$x^2 + 5x + 9$ a un discriminant $\Delta = -11 < 0$. Donc $x^2 + 5x + 9$ est toujours strictement positif

x		1	
$(x-1)(x^2 + 5x + 9)$	-	0	+

$$S =]1, \rightarrow$$

Les C.E. sont bien vérifiées par cette solution.

- Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $\log_{0,6}(x+1) \geq 2$

L'argument d'une fonction logarithme devant être strictement positif, nous avons comme CE:

$$x+1 > 0 \text{ ou encore } x > -1$$

On réécrit l'équation sous la forme $\log_a x \geq \log_a y$, la base étant ici égale à 0,6

$$\log_{0,6}(x+1) \geq \log_{0,6} 0,6^2$$

Attention, $\log_{0,6} x$ est une fonction strictement décroissante! En utilisant (4), on a alors

$$x+1 \leq 0,36$$

et donc

$$x \leq -0,64$$

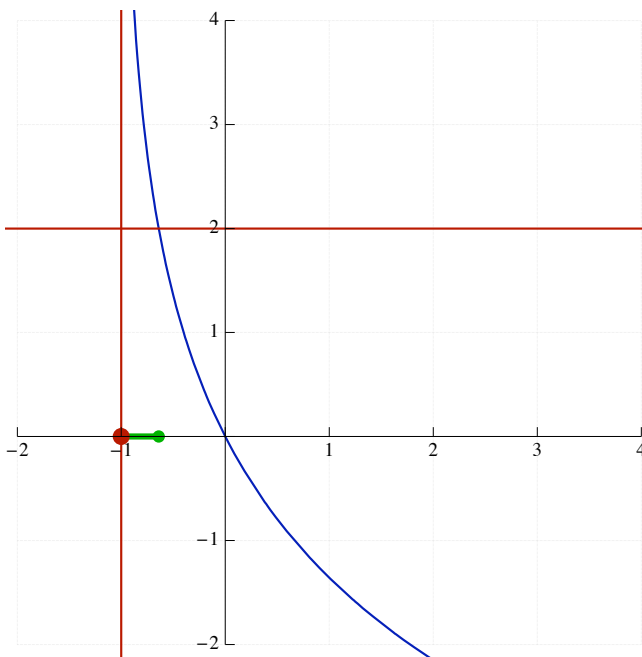
En tenant compte de la C.E., on obtient finalement

$$-1 < x \leq -0,64$$

et

$$S =]-1, -0,64]$$

Ci-dessous, la fonction $\log_{0,6}(x+1)$ dessinée en bleu.



- Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $\frac{e^x+1}{e^x-1} \geq 0$

On pose $y = e^x$. L'inéquation devient alors

$$\frac{y+1}{y-1} \geq 0$$

y		-1		1	
$\frac{y+1}{y-1}$	+	0	-		+

On obtient

$$y \leq -1 \text{ ou } y > 1$$

c'est-à-dire

$$e^x \leq -1 \text{ ou } e^x > 1$$

Étant donné que $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (image de $e^x =]0, +\infty[$)

$e^x \leq -1$ est impossible

Nous avons donc

$$e^x > 1$$

$$e^x > e^0$$

$$x > 0$$

$$S =]0, +\infty[$$

- Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $\ln x + \frac{2}{1-\ln x} \geq 0$

On pose $y = \ln x$. L'inéquation devient alors

$$y + \frac{2}{1-y} \geq 0$$

$$\frac{y-y^2+2}{1-y} \geq 0$$

$$\frac{y^2-y-2}{y-1} \geq 0$$

y		-1		1		2	
$\frac{y^2-y-2}{y-1}$	-	0	+		-	0	+

On obtient

$$-1 \leq y < 1 \text{ ou } y \geq 2$$

c'est-à-dire

$$-1 \leq \ln x < 1 \text{ ou } y \geq 2$$

$$\ln e^{-1} \leq \ln x < \ln e \text{ ou } \ln x \geq \ln e^2$$

$$\frac{1}{e} \leq x < e \text{ ou } x \geq e^2$$

$$S = \left[\frac{1}{e}, e\right[\cup [e^2, \rightarrow$$



Macformatmath.net
doing maths on your Mac