Notions de base sur les fonctions

1. Domaine de définition

Définition : soit f, une fonction réelle

dom f = $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$

Déterminer le domaine de définition, c'est trouver les réels x qui ont une image par f, c'est-à-dire pour lesquels on sait calculer f(x) (pour lesquels f(x) est un réel).

Pour cela, il suffit de résoudre les conditions d'existence.
Les 2 types de conditions rencontrées en ce début de cours correspondent à deux opérations impossibles dans les réels:

- La division par 0

Dans $\mathbb{R}$, il est impossible de diviser par 0. Peux-tu expliquer pourquoi?

Calculer le quotient $\frac{a}{0}$ est effectivement impossible dans l'ensemble des réels.

Donc, si une fonction comporte un dénominateur, il faut que ce dernier soit différent de 0.

exemple: $f(x) = \frac{3x-1}{2x^2-3x+1}$

CE: $2x^2-3x+1 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 1$ et $x \neq \frac{1}{2}$

le domaine est donc

Dom $f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, 1\}$

- La racine carrée d'un nombre négatif

Dans $\mathbb{R}$, il est impossible de calculer la racine d'un nombre négatif. Peux-tu expliquer pourquoi?

Calculer par exemple $\sqrt{-2}$ est impossible dans l'ensemble des réels.

Donc, si une fonction comporte une racine carrée, il faut que le radicant (l'expression sous la racine) soit positif.

exemple: $f(x) = \sqrt{5-7x}$

CE: $5-7x \geq 0$ c'est-à-dire $x \leq \frac{5}{7}$

le domaine est donc

Dom $f = \leftarrow, \frac{5}{7}]$

Si la racine carrée se trouve être également le dénominateur, alors le radicant doit être à la fois différent de 0 et positif, donc strictement positif.

exemple: $f(x) = \frac{3x-5}{\sqrt{2x+6}}$

CE: $2x+6 > 0$ c'est-à-dire $x > -3$

le domaine est donc

Dom $f =]-3, \rightarrow$

D'une manière plus générale, si l'on considère une racine nième $\sqrt[n]{f}$ où n est un naturel >1 et un réel quelconque,

- si n est pair , $\sqrt[n]{f}$ est un réel si $f \geq 0$
- si n est impair , $\sqrt[n]{f}$ est un réel quel que soit le réel f

Exercices - Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{3x^2 - 7x + 2}$

Dom f = $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}, 2\}$

2) $f(x) = \sqrt{5x^2 - x}$

Dom f = $\longleftarrow, 0] \cup [\frac{1}{5}, \longrightarrow$

3) $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x}{\sqrt{8 - 3x}}$

Dom f = $\longleftarrow, \frac{8}{3}[$

1) $f(x) = \dfrac{5x^2 - x + 2}{\sqrt{-2x^2 + 5x - 3}}$

Dom f = $]1, \frac{3}{2}[$

5) $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 3x + 4}$

Dom f = $\mathbb{R}$